

<b>Session:</b>	Janvier 2023.
<b>Année d'étude:</b>	Deuxième année de Licence économie-gestion mention économie et gestion.
<b>Discipline:</b>	<b>Statistiques 3</b> (Unité d'Enseignements Fondamentaux 1).
<b>Titulaire du cours:</b>	M. Youcef ASKOURA.
<b>Document(s) autorisé(s) :</b>	Calculatrice autorisée. Documents interdits, ainsi que tout autre appareil électronique.

*Examen de Statistique 3 (5009): session Janvier 2023. Durée 1h30.*

**Exercice 1.** (1 pts) Choisissez à chaque fois la bonne réponse (sans justifier : recopier simplement le numéro de la réponse correcte).

**I.** Considérons un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ , où  $\mathcal{C}$  est la tribu discrète sur  $\Omega$ . Alors, toute fonction  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une variable aléatoire (mesurable).

- (1) vrai
- (2) faux

**II.** Si une fonction de répartition  $F$  est nulle en un point  $x_0 \in \mathbb{R}$ , alors,  $F$  est nulle sur l'intervalle  $] -\infty, x_0]$ .

- (3) vrai,
- (4) faux.

**Exercice 2.** (3 pts).

Considérons l'expérience suivante : on tire un échantillon de 5 boules d'un coup d'une urne contenant 5 boules blanches et 1 boule rouge. On compte le nombre de boules blanches obtenues dans l'échantillon et on le remet dans l'urne.

On reproduit cette expérience jusqu'à l'obtention de 5 boules toutes blanches. On note par  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre d'expériences nécessaire.

1. Donner la loi de  $X$ .
2. Donner  $P(X = 7)$ .
3. Donner  $E(X)$  et  $V(X)$ .

**Exercice 3.** (4pts) On donne en fonction du paramètre  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la fonction  $g_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie en tout  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1, \\ \frac{1}{2}(x+1), & \text{si } x \in [-1, 0[, \\ \alpha x, & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Donner les valeurs (la valeur) de  $\alpha$  pour lesquelles (laquelle)  $g_\alpha$  est une densité de probabilités.
2. Soit  $X$  une v.a. ayant pour densité  $g_{\alpha_0}$ , où  $\alpha_0$  est la valeur (l'une des valeurs) trouvée en 2.
  - 2.a. Donner la fonction de répartition de  $X$ .
  - 2.b. Donner la probabilité  $P(\frac{-1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$ .
  - 2.c. Donner la densité de  $Y = X^2$ .

**Exercice 4.** (2pts)

Donner le fractile d'ordre 0,95 de la variable aléatoire  $R = \frac{X}{\sqrt{Y}}$ , où  $X \sim N(0, 4)$  et  $Y \sim \chi_{10}^2$ .

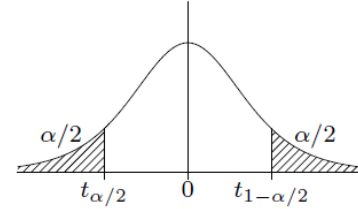
**TABLE 6.**

**Table de la loi T de Student**

Si  $T$  est une variable aléatoire suivant la loi de Student à  $\nu$  degrés de liberté, la table donne, pour  $\alpha$  fixé, la valeur  $t_{1-\alpha/2}$  telle que

$$\mathbb{P}\{|T| \geq t_{1-\alpha/2}\} = \alpha.$$

Ainsi,  $t_{1-\alpha/2}$  est le quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$  de la loi de Student à  $\nu$  degrés de liberté.



$\nu \backslash \alpha$	0,900	0,500	0,300	0,200	0,100	0,050	0,020	0,010	0,001
1	0,1584	1,0000	1,9626	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	636,6193
2	0,1421	0,8165	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	31,5991
3	0,1366	0,7649	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	12,9240
4	0,1338	0,7407	1,1896	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	8,6103
5	0,1322	0,7267	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8688
6	0,1311	0,7176	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9588
7	0,1303	0,7111	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	5,4079
8	0,1297	0,7064	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0413
9	0,1293	0,7027	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10	0,1289	0,6998	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5869
11	0,1286	0,6974	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,4370
12	0,1283	0,6955	1,0832	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	4,3178
13	0,1281	0,6938	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	4,2208
14	0,1280	0,6924	1,0763	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	4,1405
15	0,1278	0,6912	1,0735	1,3406	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	4,0728
16	0,1277	0,6901	1,0711	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	4,0150
17	0,1276	0,6892	1,0690	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,9651
18	0,1274	0,6884	1,0672	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,9216
19	0,1274	0,6876	1,0655	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,8834
20	0,1273	0,6870	1,0640	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,8495
21	0,1272	0,6864	1,0627	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,8193
22	0,1271	0,6858	1,0614	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,7921
23	0,1271	0,6853	1,0603	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,7676
24	0,1270	0,6848	1,0593	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,7454
25	0,1269	0,6844	1,0584	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,7251
26	0,1269	0,6840	1,0575	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,7066
27	0,1268	0,6837	1,0567	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,6896
28	0,1268	0,6834	1,0560	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,6739
29	0,1268	0,6830	1,0553	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,6594
30	0,1267	0,6828	1,0547	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,6460
40	0,1265	0,6807	1,0500	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,5510
60	0,1262	0,6786	1,0455	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,4602
80	0,1261	0,6776	1,0432	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,4163
120	0,1259	0,6765	1,0409	1,2886	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	3,3735
$\infty$	0,1257	0,6745	1,0364	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,2905

Lorsque  $\nu = \infty$ ,  $t_{1-\alpha/2}$  est le quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$  de la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .